Zuily - Queffélec
p. 279-282

# Equation différentielle dans les espaces de Hölder



<u>Théorème</u>: Soient $\alpha \in ]0,1]$, $a,b \in \mathbb{R}$, $q \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(]a,b[)$ positive. Pour tout $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(]a,b[)$ et tous $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$, le problème $(*)$ : $\begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), & x \in ]a,b[ \\ u(a) = u_0, \quad u(b) = u_1 \end{cases}$

admet une solution unique $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(]a,b[)$.

<u>Démonstration</u>:

• <u>Unicité</u>: On pose $M = \|q\|_\infty$. Soit $u \in \mathcal{C}^2([a,b])$. On va montrer qu'il existe $C(M) > 0$ tel que l'on ait $\|u\|_\infty \leq |u(a)| + |u(b)| + C(M)\|Pu\|_\infty$, où $P = -\frac{d}{dx^2} + q$.

On pose $\lambda = \sqrt{M+1}$, puis $g : \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{\lambda(b-a)} - e^{\lambda(x-a)} \end{array}$, de sorte que $\|g\|_\infty \leq e^{\lambda(b-a)} =: C(M)$.

On a $Pg(x) = (q(x) - \lambda^2)e^{\lambda(x-a)} - q(x)e^{\lambda(b-a)} \leq (M - \lambda^2)e^{\lambda(x-a)} \leq -1$.

On pose alors $v : \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |u(a)| + |u(b)| + g(x)\|Pu\|_\infty \end{array}$. On a $\begin{array}{l} u(a) \leq v(a), \\ u(b) \leq v(b) \end{array}$

et $Pv(x) = Pg(x)\|Pu\|_\infty \leq -\|Pu\|_\infty \leq Pu(x)$.

Par principe du maximum, on a $u(x) \leq v(x) \leq |u(a)| + |u(b)| + C(M)\|Pu\|_\infty$ sur $[a,b]$. On prouve de même cette inégalité avec $-u$, ce qui donne $\|u\|_\infty \leq |u(a)| + |u(b)| + C(M)\|Pu\|_\infty$, dont l'unicité découle.

• <u>Existence</u>: On commence par se ramener au cas $u_0 = u_1 = 0$ en posant $\tilde{u} : x \longmapsto \frac{u_1 - u_0}{b-a}(x-a) + u_0$ et $\begin{array}{l} v = u - \tilde{u} \\ \tilde{f} = f - q\tilde{u} \end{array}$. En effet, $u$ vérifie $(*)$

si et seulement si $\begin{cases} Pv = 0 \\ v(a) = v(b) = 0 \end{cases}$ $(**)$.

Pour tout $t \in [0,1]$, on pose $P_t : E := \{u \in \mathscr{C}^{2,\alpha}(]a,b[), u(a) = u(b) = 0\} \longrightarrow F = \mathscr{C}^{0,\alpha}(]a,b[)$,

$$u \longmapsto -u'' + tqu$$

puis $A := \{t \in [0,1],\ P_t : E \to F \text{ est bijectif}\}$

$= \{t \in [0,1],\ P_t : E \to F \text{ est surjectif}\}$ par unicité

- <u>$A \neq \emptyset$ :</u> On a $0 \in A$, car $u : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto -\int_a^x \left(\int_a^t f(s)\,ds\right)dt + C(x-a)$$

vérifie $P_0(u) = f$.

- <u>A est ouvert :</u> L'application $t \mapsto P_t$ est continue, et l'ensemble des inversibles de $\mathscr{L}(E,F)$ est un ouvert.

- <u>A est fermé :</u> Soit $(t_n)$ une suite d'éléments de $A$ convergeant vers $t \in [0,1]$.

Soit $f \in F$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on fixe $u_n \in E$ tel que $\begin{cases} -u_n'' + t_n q u_n = f \\ u_n(a) = u_n(b) = 0 \end{cases}$.

On rappelle que $\|u_n\|_{2,\alpha} = \|u_n\|_\infty + \|u_n'\|_\infty + \|u_n''\|_{0,\alpha}$.

On a $\|u_n\|_\infty \leqslant C(M)\,\|u_n'' - t_n q u_n\|_\infty \leqslant C(M)\,\|f\|_\infty$ (cf unicité).

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que $\|u_n\|_{1,\alpha} \leqslant \varepsilon \|u_n\|_{2,\alpha} + C_\varepsilon \|u_n\|_\infty$,

ce qui donne $\|u_n'\|_\infty \leqslant \|u_n\|_{1,\alpha} \leqslant \varepsilon \|u_n\|_{2,\alpha} + C_\varepsilon C(M)\,\|f\|_\infty$.

Enfin,
$$\begin{aligned}
\|u_n''\|_{0,\alpha} &\leqslant \|u_n'' - t_n q u_n\|_{0,\alpha} + t_n \|q u_n\|_{0,\alpha} \\
&\leqslant \|f\|_{0,\alpha} + \|q\|_{0,\alpha} \|u_n\|_{0,\alpha} \\
&\leqslant \|f\|_{0,\alpha} + \|q\|_{0,\alpha} \|u_n\|_{1,\alpha} \\
&\leqslant \|f\|_{0,\alpha} + \|q\|_{0,\alpha} \left(\varepsilon \|u_n\|_{2,\alpha} + C_\varepsilon C(M)\,\|f\|_\infty\right)
\end{aligned}$$

D'où $\|u_n\|_{2,\alpha} \leqslant \varepsilon \|q\|_{0,\alpha} \|u_n\|_{2,\alpha} + \varepsilon \|u_n\|_{2,\alpha} + C(M)\|f\|_\infty (1 + C_\varepsilon + C_\varepsilon \|q\|_{0,\alpha})$
$+ \|f\|_{0,\alpha}$

On fixe alors $\varepsilon \leqslant \frac{1}{3}$ tel que $\varepsilon \|q\|_{0,\alpha} \leqslant \frac{1}{3}$, ce qui donne

$$1 - \varepsilon - \varepsilon \|q\|_{0,\alpha} \geqslant \frac{1}{3}, \text{ d'où :}$$

$$\|u_n\|_{2,\alpha} \leqslant 3\left[ C(M)\|f\|_\infty (1 + C_\varepsilon + C_\varepsilon \|q\|_{0,\alpha}) + \|f\|_{0,\alpha} \right]$$

Il existe alors une extraction $\varphi$ telle que $u_{\varphi(n)} \longrightarrow u$ dans $\mathscr{C}^2(]a,b[)$.

Par passage à la limite dans $(*)$, on a $u'' = tqu - f \in \mathscr{C}^{2,\alpha}(]a,b[)$
$u(a) = u(b) = 0$

donc $u \in E$, ce qui prouve la surjectivité de $P_t$ : $A$ est fermé.

Par connexité, on a $A = [0,1]$. En particulier, $1 \in A$, ce qui achève la preuve.